BACCALAUREAT GENERAL

Baccalauréat Blanc

Mars 2012

MATHEMATIQUES

série : S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter quatre exercices.
La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte 6 pages.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées au candidat.

Exercice 1: (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repére orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. **a.** Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

   b. Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Placer les points A, B et B'.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, À tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1+i)z + 1.$$

   a. Montrer que B a pour image B' par f.

   b. Montrer que A est le seul point invariant par f.

   c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z'-z}{i-z} = -i$.
   Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
   En déduire une méthode de construction de M′ À partir de M, pour M distinct de A.

3. **a.** Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.

   b. Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$.
   En déduire que si le point M appartient À Σ_1, alors son image M' par f appartient À un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

   c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 2: (5 points)

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de m.
On note f(t) la taille en m, d'un plant après t jours. On a donc $f(0)=0{,}1$
Le modèle de Vershulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation :

$f'(t)=a\ f(t)(1-f(t))$ où a est une constante dépendant des conditions expérimentales.

Autrement dit, f est une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle : $y'=ay(1-y)$

1. On pose, pour tout réel t positif, $z(t)=\dfrac{1}{f(t)}$.

   a. Montrer que la fonction z est solution de l'équation différentielle suivante : $y'=-ay+a$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation différentielle .

   c. En déduire que, pour tout réel t positif, on a $f(t)=\dfrac{1}{9\,\mathrm{e}^{-at}+1}$.

2. On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19cm. Calculer a (on arrondira à 10^{-2} près).

3. Etudier la limite de f en $+\infty$ et présiser son sens de variation.

4. Représenter graphiquement la fonction f.

5. Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90cm de haut ?

Exercice 3: (5 points)

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A »

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$.
La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique de l'annexe, page 6.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur **N** par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique de l'annexe, page 6).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
3. a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

   d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4: (5 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle [1 ; 46].

1. On considère l'équation

$$(E) : \quad 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \quad (47)$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $ab \equiv 0 \quad (47)$ alors $a \equiv 0 \quad (47))$ ou $b \equiv 0 \quad (47)$.

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \quad (47)$ alors $a \equiv 1 \quad (47)$ ou a $a \equiv -1 \quad (47)$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que

$p \times inv(p) \equiv 1 \quad (47)$.

Par exemple :

$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1 \quad (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1 \quad (47)$,

$inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1 \quad (47)$.

b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

c. Montrer que $46! \equiv -1 \quad (47)$.

Exercice 4: (5 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   a. Calculer v_0.

   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   a. Calculer w_0.

   b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

   d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

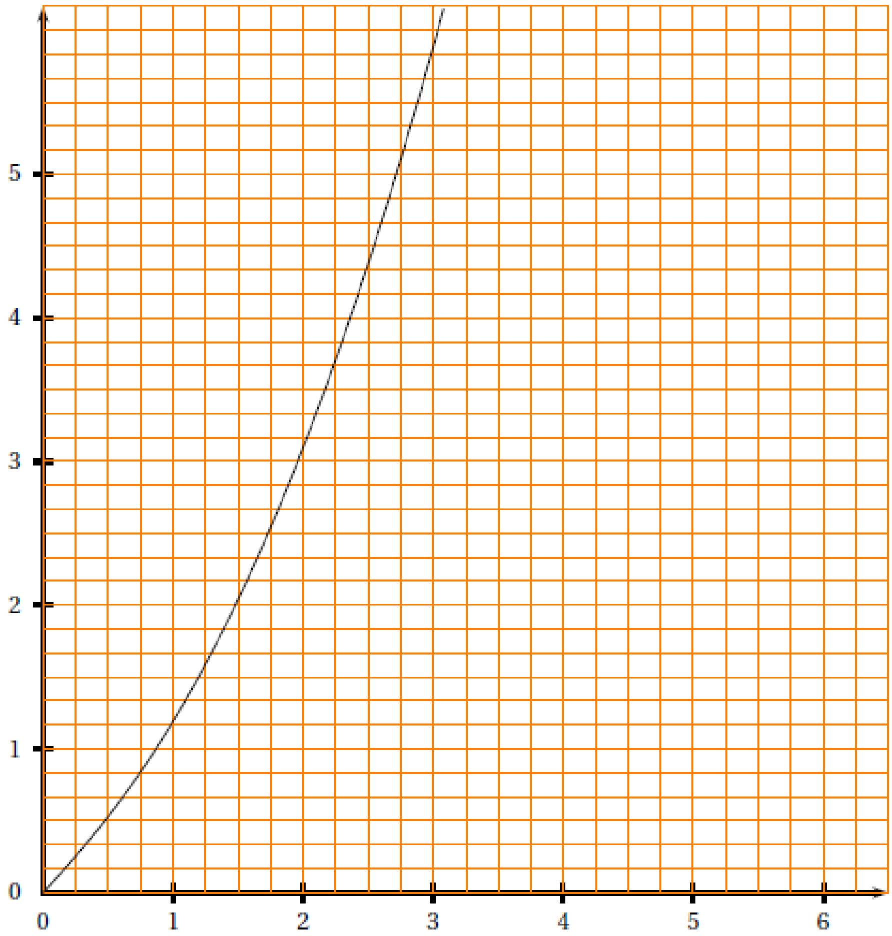
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur



BACCALAUREAT GENERAL

Baccalauréat Blanc

Mars 2012

MATHEMATIQUES

série : S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter quatre exercices.
La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte 6 pages.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées au candidat.