Exercice 1 (5 points) (Nouvelle calédonie nov 2012)

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.
La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

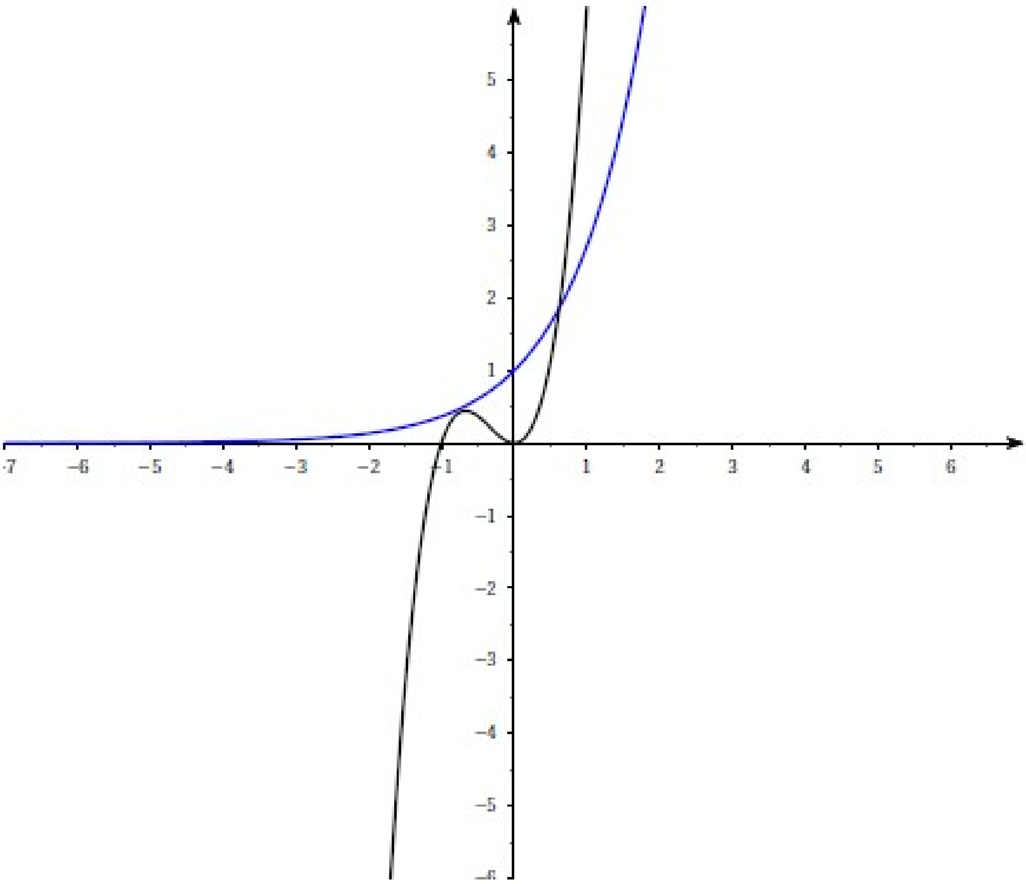
1. Placer le point A et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a
$$\left(z'-1\right)(z-1) = \frac{1}{2}.$$
3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $\mathrm{A}M \times \mathrm{A}M' = \frac{1}{2}$;
   - $M' \neq \mathrm{A}$;
   - $\left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif
4. On considère le point P d'affixe $z_{\mathrm{P}} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P′, image de P par f, et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \frac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   a. Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O de rayon 1.
   b. Tout point de $\mathscr{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 2 (6 points)(centres étrangers 2012)

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

   b. En déduire que l'équation (E)n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

   Montrer que, sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

   b. Déterminer les variations de la fonction h.

   c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

   d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice 3 :(Liban 2013)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.
   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.