# Devoir Commun n°3

**MATHEMATIQUES**

**série : S**

Mardi 16 avril 2013

## Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 6 pages.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation.

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants <u>que vous traiterez sur 4 feuilles doubles distinctes.</u>**

**Vous devez paginer votre copie sans omettre les feuilles annexes qui sont à rendre avec la copie.**

**Mentionnez sur votre copie votre classe.**

**EXERCICE 1** **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

*Une réponse exacte rapporte 1 point.*
*Une réponse inexacte enlève 0,25 point.*
*L'absence de réponse est comptée 0 point.*
*Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.*

---

Soit $m$ un nombre réel et $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ de $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = m\sin x$.

**1.** Pour quelle valeur de m, f est une densité de probabilité sur $[0\,;\,\pi]$ :

**A.** $m = 1$ **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$ **C.** $m = \dfrac{1}{2}$ **D.** $m = 2$

**2.** Soit $X$ une variable aléatoire dont $f$ est une densité de probabilité.
Alors la probabilité $P\left(\dfrac{\pi}{4} \leq X \leq \dfrac{3\pi}{4}\right)$ est :

**A.** $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

---

On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

**3.** La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

**A.** $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{12}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

---

On note $X$ une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda$ étant un nombre réel strictement positif).

**4.** La probabilité de l'évènement $\{1 \leq X \leq 3\}$ est égale à :

**A.** $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$ **B.** $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$ **C.** $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$ **D.** $\dfrac{e^{-3\lambda}}{e^{-\lambda}}$

**Exercice 2** **5 points**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on associe à tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle, le point $M'$ milieu du segment $[MM_1]$ où $M_1$ est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.
Le point $M'$ est appelé l'image du point $M$.

1. **a.** Montrer que les distances $\mathrm{O}M$ et $\mathrm{O}M_1$ vérifient la relation $\mathrm{O}M \times \mathrm{O}M_1 = 1$ et que les angles $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_1}\right)$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_1}\right) = -\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$ à $2\pi$ près.

   **b.** Sur la figure donnée en annexe 1(à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
   Construire le point A$'$ image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2. **a.** Justifier que pour tout nombre complexe $z$ non nul, le point $M'$ a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

   **b.** Soient B et C les points d'affixes respectives 2i et $-2$i. Calculer les affixes des points B$'$ et C$'$ images respectives des points B et C.

   **c.** Placer les points B, C, B$'$ et C$'$ sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).

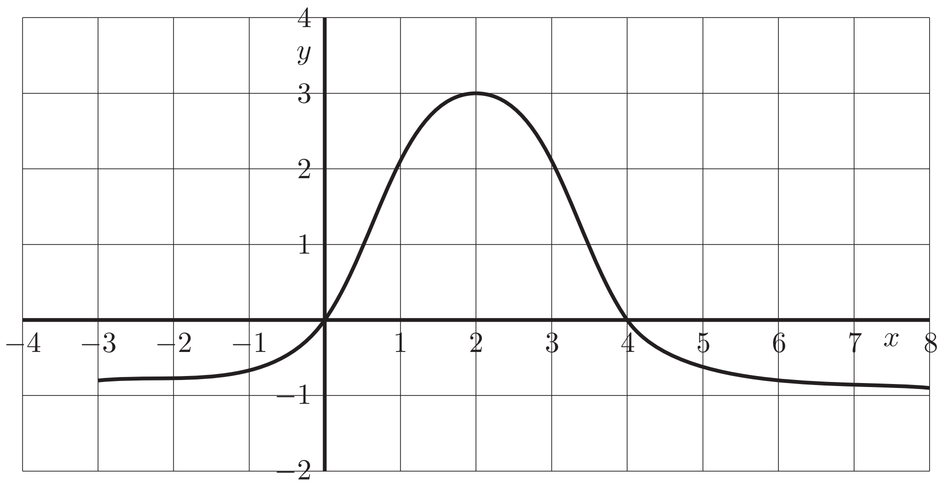
3. Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $M' = M$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que si le point $M$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image $M'$ appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives $-1$ et 1.

**EXERCICE 3** **5 points**

**(Commun à tous les candidats)**

On donne la représentation graphique d'une fonction $f$ définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\ ;\ 8]$.




On définit la fonction $F$ sur $I$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

**1.** **a)** Que vaut $F(0)$ ?

**b)** Donner le signe de $F(x)$ :
- pour $x \in [0\ ;\ 4]$ ;
- pour $x \in [-3\ ;\ 0]$.

Justifier les réponses.

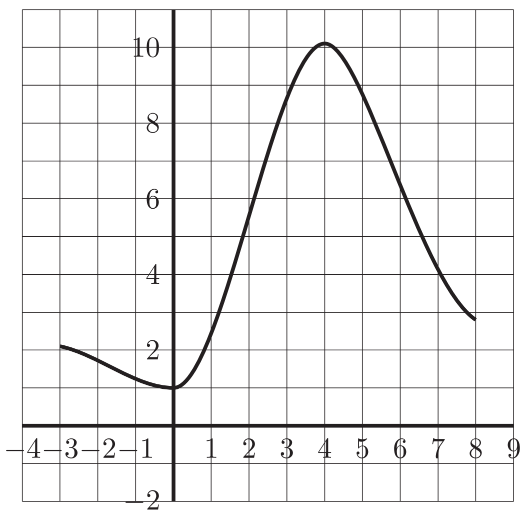
**c)** Faire figurer sur le graphique donné en **ANNEXE** les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

**2.** **a)** Que représente $f$ pour $F$ ?

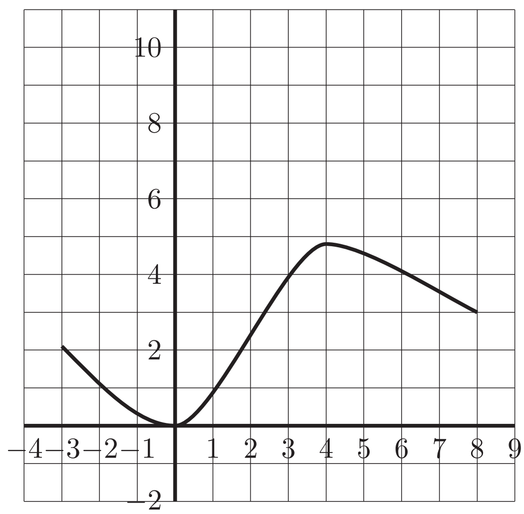
**b)** Déterminer le sens de variation de la fonction $F$ sur $I$. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de $f$.

**3.** On dispose de deux représentations graphiques sur $I$.

Courbe A




Courbe B




L'une des courbes peut-elle représenter la fonction $F$ ? Justifier la réponse.

**EXERCICE 4** **6 points**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, par :

$$u_n = e^{-n}$$

**IV-1-a-** Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**1-b-** Montrer que, pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, on a : $\quad 0 < u_n \leq 1$

**IV-2-** Etudier le signe de la fonction $h$ définie, pour tout réel $t$ de $]\,0\,;\,+\infty[$, par :

$$h(t) = 1 - \ln(t)$$

**IV-3-** Soit la fonction $g$ définie, pour tout réel $t$ de $]\,0\,;\,+\infty[$, par :

$$g(t) = t\,(2 - \ln(t))$$

**3-a-** Déterminer $g'(t)$ où $g'$ est la dérivée de $g$. On détaillera le calcul.

**3-b-** En déduire la primitive $H$ de la fonction $h$ qui s'annule en $e^2$. On justifiera la réponse.

**IV-4-** On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, par :

$$v_n = \int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} (1 - \ln(t))\,dt$$

**4-a-** Justifier que, pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, on a : $\quad v_n \geq 0$

**4-b-** A l'aide de la question **IV-3-b-**, calculer $v_n$ en fonction de $n$. On détaillera le calcul.

**4-c-** Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ .

**IV-5-** Pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, on pose : $\quad S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

**5-a-** Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

**5-b-** Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ .

**Nom :**

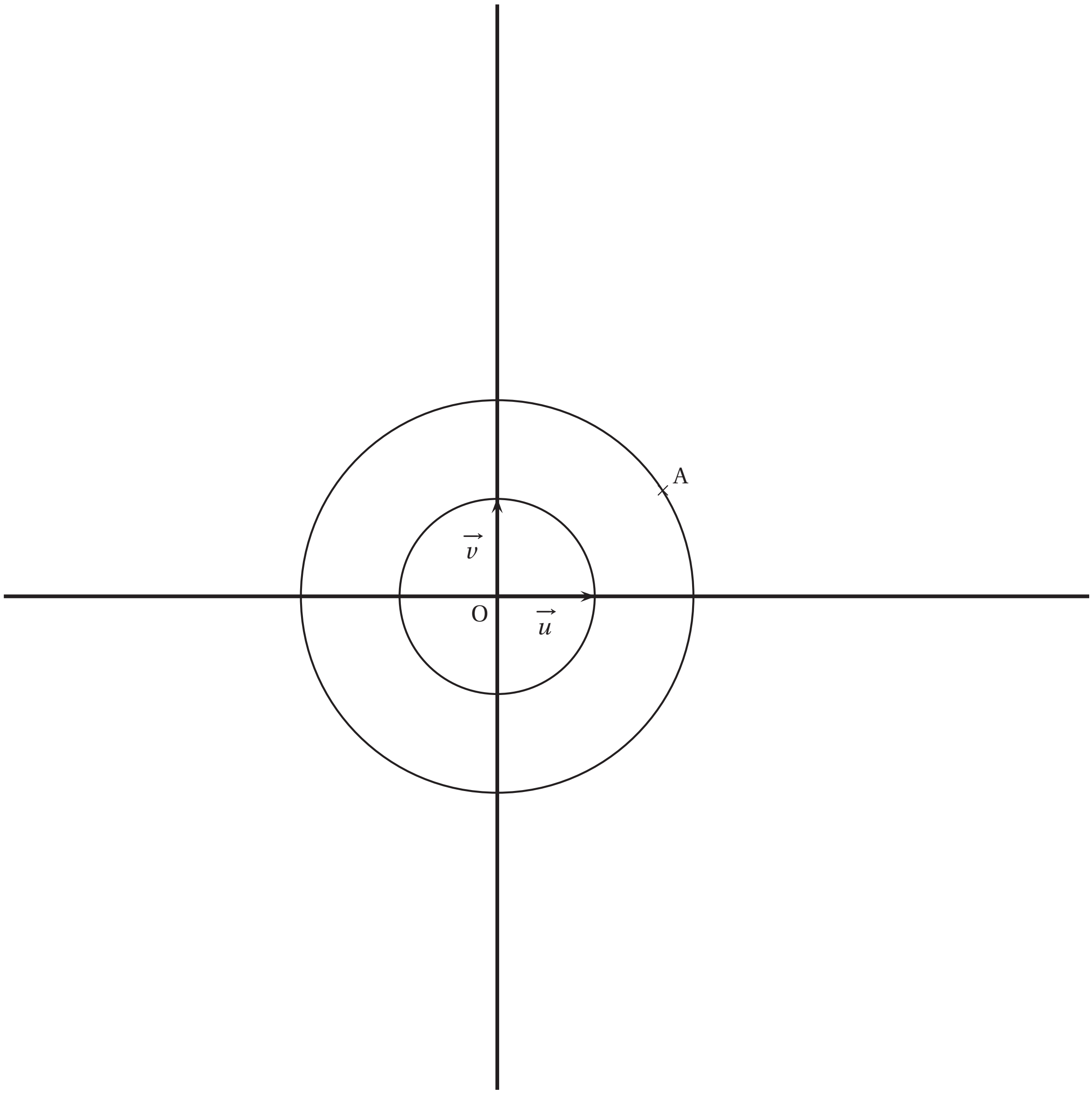
**Classe :**

**ANNEXE 1**

**Exercice 2**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

(À rendre avec la copie)



**Nom :**

**Classe :**

**ANNEXE 2**

## Exercice 3
## Commun à tous les candidats