Devoir Commun n°1 – Term.S Mardi 23 octobre 2012

Exercice 1

I. On considère le polynôme P défini pour tout z de $\mathbb{C}$ par $P(z) = .z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

1. Justifier que -1 est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$.

b. En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

II. Déterminer les réels a et b tels que $(a + 2i)(5 + ib) = 4 + 16i$

III. *<u>VRAI – FAUX</u>*

Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse :

1. $\overline{(2+i)^3} = (2-i)^3$

2. $\overline{3-iz} = 3+iz$

Exercice 2

Donner, dans chaque cas, un exemple de suite (u_n) satisfaisant les conditions données :
(Aucune justification n'est demandée)

1. (u_n) est bornée et divergente.

2. (u_n) est converge vers 0 et n'est pas monotone.

Exercice 3

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

e. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

b. En déduire que S_n est majorée

c. Montrer que S_n est strictement croissante.

d. Que peut-on en déduire quant à la suite S_n ?