DEVOIR COMMUN n°2 Mathématiques T S
LIAD Mardi 17 Janvier 2012 Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter quatre exercices.
La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Le sujet comporte 6 pages

Exercice 1: QCM (3 points)
(commun à tous les candidats)

Pour chacune des questions suivantes numérotées de 1 à 6, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Question1: Une solution de l'équation $2z+\overline{z}=9+i$	A) 3 B) i C) 3+i
Question2: Soit z un nombre complexe ; $\lvert z+1 \rvert$ est égal à :	A) $\lvert z \rvert+1$ B) $\lvert z-1 \rvert$ C) $\lvert i\overline{z}+1 \rvert$
Question 3: Soit z un nombre complexe d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$	A) $\dfrac{-\pi}{3}+\theta$ B) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ C) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$
Question 4: Soient S et N deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\lvert z-1+i \rvert = \lvert 3-4i \rvert$ est :	A) La droite (SN) B) le cercle de diamètre [SN] C) la droite perpendiculaire à (SN) passant par O.
Question 5: Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i. L'affixe du point C tel que ABC est isocèle avec $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}$ est	A) 1-4i B) -3i C) 7+4i
Question 6: L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :	A) {1-i} B) $\emptyset$ C) {1-i ; 1+i }

Exercice 2 (6 points)
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[.

b. Résoudre dans l'intervalle [0 ; +∞[[l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

2. Étude de la suite (un) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$$

a. Sur le graphique représenté dans l'annexe , sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées (u_0 ; 0), et, en utilisant ces courbes,construire à partir de A_0 les points A_1,
A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \alpha$

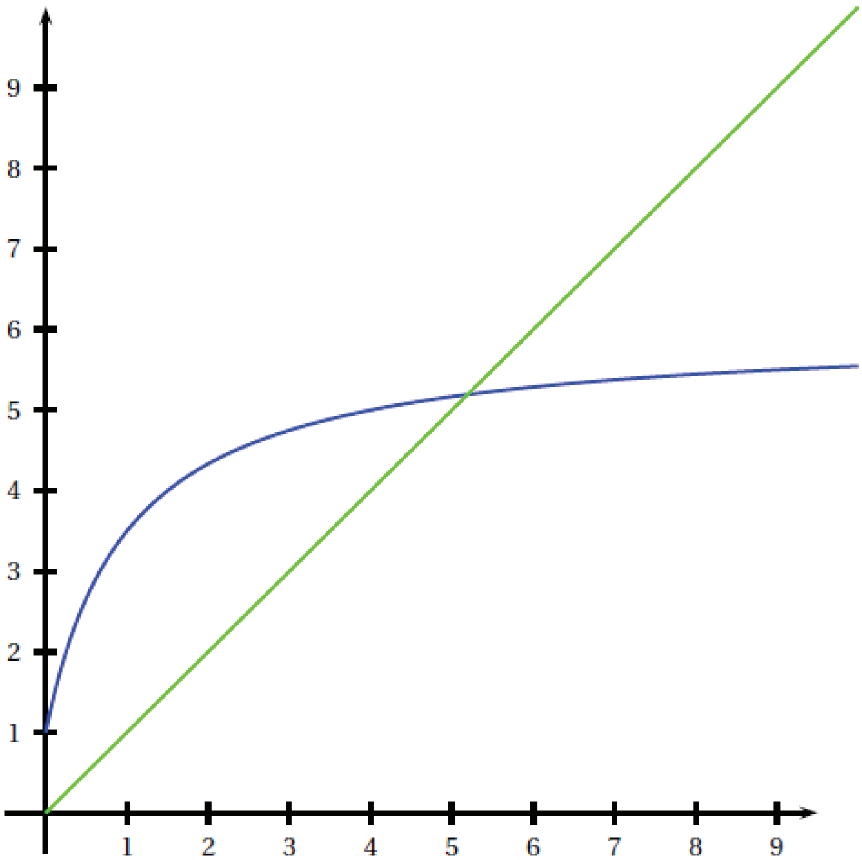
c. En déduire que la suite (un) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

ANNEXE : NOM : PRENOM : classe :



Exercice 4 : (5points)
candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=e^{-x} sinx$.

On appelle (Cf) la courbe d'équation y = f(x) dans le plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthogonal .

On prendra 2cm pour une unité sur l'axe des ordonnées et 6cm pour π unités sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que , pour tout réel x , $-e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant e^{-x}$.

En déduire $\lim f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe (Cf).

2. Montrer que la fonction dérivée de f vérifie :

$$f'(x)=-\sqrt{2}e^{-x}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$ pour x réel.

3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $[\frac{-\pi}{2};\pi]$

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$\frac{-\pi}{2}$	π
$x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
Signe de $\cos(x+\frac{\pi}{4})$		

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[\frac{-\pi}{2};\pi]$.

4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[\frac{-\pi}{2};\pi]$ ainsi que les courbes (C_1) et (C_2) d'équations $y=-e^{-x}$ *et* $y=e^{-x}$

5. Déterminer algébriquement sur $\mathbb{R}$ puis sur $[\frac{-\pi}{2};\pi]$, les coordonnées des points communs à :

a. (Cf) et l'axe des abscisses.
b. (Cf) et (C_1).
c. (Cf) et (C_2).

6. Déterminer à l'aide de la calculatrice , un réel α tel que , pour $x\geqslant\alpha$, on ait $|f(x)|\leqslant 10^{-2}$

Exercice 4: (5points)

candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 3: (6 points)
(commun à tous les candidats)